Planificação **Aula 21** (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 27/05, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 27/05, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 28/05, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 26/05, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 28/05, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 68 a 70 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Notas:
- Resolver antes da aula os integrais parciais do final desta planificação.
- A matéria desta aula não está nos slides (ver pág. 68 a 70 dos apontamentos)

EDOs exatas

Definição: Uma EDO do tipo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diz-se exata se existir uma função $F(x,y)$ com derivadas parciais contínuas tal que
$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)}$$

- Critério para verificar se uma EDO é exata

A EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata se e só se $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}$
(onde $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas)

- Solução da EDO $\rightsquigarrow$ $F(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}$, onde a função F satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \end{cases}$$

- Procedimento para resolver este sistema

  - Integra-se "parcialmente" a 1ª eq. em ordem a x ou a 2ª eq. em ordem a y (a constante de integração vai depender da outra variável)

  - Derivar parcialmente a função obtida em ordem à outra variável

  - Igualar esta derivada à equação do sistema que não foi integrada para determinar a constante de integração.

Exercício 1: Verifique se as seguintes EDOs são exatas e, caso sejam, resolva-as:

a) $y' = -\dfrac{x^3+y^3}{3xy^2+\cos y}$

b) $y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)y' = 0$

c) $\operatorname{sen} y + (y^2 - x\operatorname{sen} y)y' = 0$

d) $(y\cos(xy) - 1)dx + (x\cos(xy) + e^y)dy = 0 \quad , \; y(1) = \frac{\pi}{2}$

Fator integrante $\rightsquigarrow$ usa-se para transformar uma EDO que não é exata numa EDO exata.

Definição: Chama-se fator integrante da EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ a toda a função $\mu(x,y)$ não nula tal que a EDO

$$\boxed{\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0}$$

seja exata.

Exercício 2: Mostre que $3y + 4xy^2 + (2x + 3yx^2)y' = 0$ não é uma EDO exata e verifique que $\mu(x,y) = yx^2$ é um fator integrante para esta EDO.

Método para determinar fatores integrantes → ver mais detalhes na pág. 70

1.º caso: Fator integrante que depende apenas de x

Se $\boxed{g(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}}$ só depende de x então $\boxed{\mu(x) = e^{\int g(x)dx}}$

2.º caso: Fator integrante que depende apenas de y

Se $\boxed{h(y) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}}$ só depende de y então $\boxed{\mu(y) = e^{\int -h(y)dy}}$

Exercício 3: Verifique que a EDO $(5 + y^3\operatorname{sen} x)dx + 3y^2\cos x\, dy = 0$ não é exata e resolva-a usando um fator integrante.

TPCs: Folha prática 4: 11, 12, 13

2.º teste, 19/06/2019 → Ex 2c)

2.º teste, 13/06/2018 → Ex 2b)

1.º teste, 05/04/2017 → Ex. 5)

Ex. Final, 22/06/2017 → Ex. 4b)

Ex. Recurso, 10/07/2017 → Ex. 3

Integração parcial ⇝ Exemplos e exercícios

- $\int f(x,y)\,dx$ ⇝ integra-se como se y fosse uma constante
- $\int f(x,y)\,dy$ ⇝ integra-se como se x fosse uma constante

Exemplos:

função que só depende de y

$$\int (x^2 - xy^3 + 5)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \times y^3 + 5x + C(y)$$

função que só depende de x

$$\int (x^2 - xy^3 + 5)\,dy = x^2 y - x \times \frac{y^4}{4} + 5y + C(x)$$

$$\int y^2 \cos(6xy^2)\,dx = \frac{1}{6}\int 6y^2 \cos(6xy^2)\,dx = \frac{1}{6}\,\text{sen}(6xy^2) + C(y)$$

C. aux. $u = 6xy^2$

$u'_x = (6xy^2)'_x = 6y^2$

Exercícios: (para resolver antes da aula)

a) $\int (x^2y^4 - \cos(y))\,dx$

b) $\int e^{5x}\,\text{sen}(y)\,dy$

c) $\int e^{5x}\,\text{sen}(y)\,dx$

d) $\int \frac{xy}{xy^2 + 5x^3}\,dy$

e) $\int yx^2 \times (y^2 + yx^3)^7\,dx$

Soluções

a) $\frac{x^3}{3}y^4 - \cos(y)\,x + C(y)$

b) $-e^{5x}\cos(y) + C(x)$

c) $\frac{1}{5}e^{5x}\,\text{sen}(y) + C(y)$

d) $\frac{1}{2}\ln|xy^2 + 5x^3| + C(x)$

e) $\frac{(y^2 + yx^3)^8}{24} + C(y)$

Aula 21 EDOs exatas

1 a) $y' = -\dfrac{x^3+y^3}{3xy^2+\cos y}$

Verificar se a EDO é exata e resolver

1º Passo: Escrever a EDO na forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$$y' = -\frac{x^3+y^3}{3xy^2+\cos y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3+y^3}{3xy^2+\cos y} \Leftrightarrow (3xy^2+\cos y)\,dy = -(x^3+y^3)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{(x^3+y^3)}}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{\boxed{(3xy^2+\cos y)}}_{N(x,y)}\,dy = 0$$

2º Passo: Verificar se a EDO é exata, ou seja:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x^3+y^3)'_y = 3y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (3xy^2+\cos y)'_x = 3y^2$$

São iguais, logo a EDO é exata

3º Passo: Escrever o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x^3+y^3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3xy^2+\cos y \end{cases}$$

A solução da EDO é $F(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}$ e pretendemos determinar a função $F(x,y)$

Daqui em diante temos duas alternativas de resolução

4º Passo: Integrar em ordem a x a 1ª eq. do sistema

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x^3+y^3$$

Integrando em ordem a x

$$F(x,y) = \int (x^3+y^3)\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4} + y^3x + c(y)$$

função que só depende de y

4º Passo: Integrar em ordem a y a 2ª eq. do sistema

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3xy^2+\cos y$$

Integrando em ordem a y

$$F(x,y) = \int (3xy^2+\cos y)\,dy$$
$$= \frac{\cancel{3}xy^2}{\cancel{3}} + \operatorname{sen} y + c(x)$$

função que só depende de x

5º Passo: Derivar a função F encontrada em ordem a y.

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + y^3x + c(y)$$

Derivar em ordem a y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2x + c'(y)$$

6º Passo: Igualar a derivada obtida com a 2ª eq. do sistema do 3º passo e obter c'(y)

$$3y^2x + c'(y) = 3xy^2 + \cos y \Leftrightarrow c'(y) = \cos y$$

Nota: todos os "x" têm de cancelar

7º Passo: Integrar c'(y) para obter c(y)

$$c'(y) = \cos y$$

$$c(y) = \int \cos y \, dy = \operatorname{sen} y$$

(não colocar +c)

8º Passo: Substituir a expressão de c(y) obtida na expressão de F do 4º passo

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + y^3x + c(y)$$

$c(y) = \operatorname{sen} y$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + y^3x + \operatorname{sen} y$$

5º Passo: Derivar a função F encontrada em ordem a x.

$$F(x,y) = xy^3 + \operatorname{sen} y + c(x)$$

Derivar em ordem a y

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y^3 + c'(x)$$

6º Passo: Igualar a derivada obtida com a 1ª eq. do sistema do 3º passo e obter c'(x)

$$\cancel{y^3} + c'(x) = x^3 + \cancel{y^3} \Leftrightarrow c'(x) = x^3$$

Nota: todos os "y" têm de cancelar

7º Passo: Integrar c'(y) para obter c(y)

$$c'(x) = x^3$$

$$c(\ ) = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}$$

(não colocar +c)

8º Passo: Substituir a expressão de c(x) obtida na expressão de F do 4º passo

$$F(x,y) = xy^3 + \operatorname{sen} y + c(x)$$

$c(x) = \frac{x^4}{4}$

$$F(x,y) = xy^3 + \operatorname{sen} y + \frac{x^4}{4}$$

9º Passo: A solução da EDO inicial é dada por $F(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}$

A solução é $\frac{x^4}{4} + y^3x + \operatorname{sen} y = c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)y' = 0$

1º Passo:

$$y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{(y + 2xe^y)}}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\boxed{(x^2e^y + x - 2y)}}_{N(x,y)}dy = 0$$

2º Passo:

$$\frac{dM}{dy} = (y + 2xe^y)'_y = 1 + 2xe^y$$

iguais

$$\frac{dN}{dx} = (x^2e^y + x - 2y)'_x = 2xe^y + 1$$

A EDO é exata

3º Passo:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(x,y) = y + 2xe^y \\ \frac{dF}{dy}(x,y) = \underbrace{x^2e^y + x - 2y}_{*} \end{cases}$$

4º Passo

integrar em ordem a x

$$F(x,y) = \int (y + 2xe^y)\,dx$$

$$= yx + \cancel{2}\times\frac{x^2}{\cancel{2}}e^y + c(y)$$

5º Passo: Derivar em ordem a y

$$\frac{dF}{dy}(x,y) = (yx + x^2e^y + c(y))'_y$$

$$= \underbrace{x + x^2e^y + c'(y)}_{**}$$

6º Passo: $* = **$

$$\cancel{x^2e^y} + \cancel{x} - 2y = \cancel{x} + \cancel{x^2e^y} + c'(y)$$

$$\Leftrightarrow c'(y) = -2y \xrightarrow{\text{7º Passo}} c(y) = \int -2y\,dy = -\frac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}} = -y^2$$

8º Passo: $F(x,y) = yx + x^2e^y + c(y)$ $\quad c(y) = -y^2$

$$= yx + x^2e^y - y^2$$

9º Passo:

A solução é $yx + x^2e^y - y^2 = c, \; c \in \mathbb{R}$

d) $\underbrace{(y\cos(xy) - 1)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x\cos(xy) + e^y)}_{N(x,y)}dy = 0$

1º) ✓

2º) $\frac{dM}{dy} = 1\times\cos(xy) + y\times(-x\,\text{sen}(xy))$

$$= \cos(xy) - yx\,\text{sen}(xy)$$

$$\frac{dN}{dx} = 1\times\cos(xy) + x\times(-y\,\text{sen}(xy))$$

$$= \boxed{\cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy)}$$

iguais, logo é exata

3º

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} = y\cos(xy) - 1 \\ \boxed{\frac{dF}{dy} = x\cos(xy) + e^y} \end{cases}$$

4º

$$F(x,y) = \int (y\cos(xy) - 1)\,dx$$

$$= \int y\cos(xy)\,dx - \int 1\,dx$$

$u = xy$

$u' = (xy)'_x = y$

$$= \text{sen}(xy) - x + c(y)$$

5º

$$\boxed{\frac{dF}{dy}(x,y) = x\cos(xy) + c'(y)}$$

6) $x\cos(xy) + e^y = x\cos(xy) + c'(y)$

$\Leftrightarrow c'(y) = e^y \Rightarrow c(y) = \int e^y dy = e^y$

8º) $F(x,y) = \text{sen}(xy) - x + e^y$

9º) A solução é

$\text{sen}(xy) - x + e^y = c, c \in \mathbb{R}$

10º Passo: Usar a condição extra para determinar o valor de c

$y(\underset{x}{1}) = \underset{y}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Sen}\left(1 \times \frac{\pi}{2}\right)}_{=\cancel{1}} - \cancel{1} + e^{\frac{\pi}{2}} = c$

$\Leftrightarrow c = e^{\frac{\pi}{2}}$

Resposta: $\text{sen}(xy) - x + e^y = e^{\frac{\pi}{2}}$

2) $3y + 4xy^2 + (2x + 3yx^2)y' = 0$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$\Leftrightarrow \underbrace{(3y + 4xy^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2x + 3yx^2)}_{N(x,y)}dy = 0$

$\frac{dM}{dy} = 3 + 8xy$

$\frac{dN}{dx} = 2 + 6xy$

diferentes, logo a EDO não é exata.

Fator integrante: $\mu(x,y) = yx^2$

$yx^2 \times (3y + 4xy^2)dx + yx^2(2x + 3yx^2)dy = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(3x^2y^2 + 4x^3y^3)}_{\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{(2x^3y + 3x^4y^2)}_{\tilde{N}(x,y)}dy = 0$

$\frac{d\tilde{M}}{dy} = 6x^2y + 12x^3y^2$

$\frac{d\tilde{N}}{dx} = 6x^2y + 12x^3y^2$

iguais

A EDO é exata e por isso $\mu(x,y)$ é um fator integrante.

3 $\underbrace{(5 + y^3\text{sen}\,x)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{3y^2\cos x}_{N(x,y)}dy = 0$

$\frac{dM}{dy} = 3y^2\text{sen}\,x$

$\neq$ Não é exata

$\frac{dN}{dx} = -3y^2\text{sen}\,x$

$\cdot \dfrac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \dfrac{3y^2\text{sen}\,x - (-3y^2\text{sen}\,x)}{3y^2\cos x}$

$= \dfrac{6\cancel{y^2}\text{sen}\,x}{3\cancel{y^2}\cos x} = \boxed{\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos x}}$ $g(x)$

Só depende de x

Fator integrante:

$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{-2\ln|\cos x|} = \cancel{e^{\ln}}|\cos x|^{-2} = (\cos)^{-2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$

c. aux $\int \frac{2\,\text{sen}\,x}{\cos x}$

$= -2\int \frac{-\text{sen}\,x}{\cos x}dx = -2\ln|\cos x|$

$u = \cos x \quad u' = -\text{sen}\,x$

$\frac{1}{(\cos x)^2}(5 + y^3\text{sen}\,x)dx + \frac{1}{(\cos x)^2} \times (3y^2\cos x)dy = 0$

- Verificar que é exata $\to$ T.P.C.
- Resolver $\to$ T.P.C.

Solução: $5\,\text{tg}\,x + \frac{y^3}{\cos x} = c, c \in \mathbb{R}$